

Exercice 2 [ECRICOMIE 2018 + CNM 2021]

Q16. • On a $\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ et $\ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty}$.

• On a $\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln x - \ln(x+1) = \ln \frac{x}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 1 = 0$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

Q17. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions usuelles.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

Ainsi $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Or d'après Q1, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ donc $\boxed{f \text{ est négative sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) \end{aligned}$$

$= f(n) \leq 0$ d'après Q17. donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

Q19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - (u_n - \frac{1}{n}) \\ &= \cancel{\frac{1}{n+1}} + \ln n - \ln(n+1) - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} u_{n+1} - u_n \text{ calculé en Q18}$

Q20. • On considère $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(1+x) - x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions usuelles.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \leq 0$ donc g est décroissante sur $[0, +\infty[$
si pour $x \geq 0$

Comme $g(0) = 0$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq 0$, i.e.
 $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x}$.

Rq: On aurait aussi pu procéder par concavité de $x \mapsto \ln(1+x)$.

• En particulier, pour $x = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}_+$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on a $\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$,
 d'où, d'après Q19, $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$.

Q21. Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

D'après Q18 et Q20, on a déjà qu'une est croissante et l'autre décroissante. De plus $v_n - u_n = \frac{-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes et ont la même limite.

Q22. Comme $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et par monotonie de (u_n) et (v_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_n &\leq \gamma \leq u_n \\ u_n - \frac{1}{n} &\leq \gamma \leq u_n && \downarrow \text{déf. } v_n \\ -\frac{1}{n} &\leq \gamma - u_n \leq 0 && \downarrow -u_n \end{aligned}$$

D'où, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| = |\gamma - v_n| \leq \frac{1}{n}}$.

Q23. D'après la question précédente et la définition de u_n , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |H_n - \ln n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

En particulier, $H_n - \ln n - \gamma \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(\frac{1}{n})$ on encore $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})}$.

Q24. Soit $n \geq 2$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$, on a,

$$\text{pour tout } k \geq 1, \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

$$\underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{t+1} dt}_{=\frac{1}{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt}_{=\frac{1}{k}}$$

On somme alors ces inégalités pour k de 1 à $n-1$ et on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

On $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \stackrel{\text{Chasles}}{=} \int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n.$

On a ainsi montré que $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

Q25. Pour $n \geq 2$, on a $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) - 1 = H_n - 1$

et $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n} = H_n - \frac{1}{n}.$

D'après l'encadrement de Q24, on a alors, pour tout $n \geq 2$,

$$H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - \frac{1}{n}, \quad \text{ie} \quad \frac{1}{n} \leq \underbrace{H_n - \ln n}_{u_n} \leq 1.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (possible par Q21), il vient $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}.$

Q26. $\forall n \geq 1, \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \times \frac{1}{n}$ avec $\frac{1}{n} \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ décroissante.

D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la série $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}}.$

~~Q27. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Par Q26, on sait que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S \in \mathbb{R}.$~~

~~$$\text{On a } S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{2p}}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}$$~~

~~$$= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} -$$~~

Q27. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

D'après Q26, on sait qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$. Déterminons S .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{2p}}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}$$

$\swarrow$ $k=2p$ dans la 1^{ère}
 $k=2p+1$ dans la 2^{ème}

$\forall p, \quad (-1)^{2p} = 1$
 $\quad \quad (-1)^{2p+1} = -1$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p}$$

on ajoute et enlève
pour faire apparaître H_n

$$= \frac{1}{2} H_n - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} H_n$$

$$= H_n - H_{2n}$$

$$\stackrel{Q23}{=} \ln n + \gamma - (\ln(2n) + \gamma) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2.$$

La suite (S_n) converge vers S et sa sous-suite (S_{2n}) converge vers $-\ln 2$
donc par unicité de la limite, $S = -\ln 2$.

Finalement $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2}.$